

*Лівандовська Марія,*  
*студентка V курсу, спеціальність «Математика та фізика»*  
*Науковий керівник – Чемерис О.А.,*  
*кандидат педагогічних наук, доцент*

## **МАТЕМАТИЧНІ ЗАКОНОМІРНОСТІ В МУЗИЦІ**

Роль математики в практичній діяльності людини така велика, що наш час називають епохою математичних знань. Годфрі Харді зазначав: «Вважаю, що математика – знаряддя, за допомогою якого людина пізнає і підкорює собі навколишній світ, а також підкорюється їй»

Математика – найдавніша з наук, вона тісно пов'язана з іншими науками, зокрема, з літературою, мистецтвом, музикою тощо. Математика і музика – два полюси людської культури. Слухаючи музику, ми відчуваємо звукові коливання; розв'язуючи приклади, використовуємо простір чисел. Виявляється, що звуки і простір чисел мають закономірності між собою. Зв'язок математики і музики зумовлений як історично, так і внутрішньо, незважаючи на те, що математика – найабстрактніша з наук, а музика – найбільш абстрактний вид мистецтва.

Дослідженню музики присвячували свої роботи багато відомих математиків: Рене Декарт, Готфрід Лейбніц, Християн Гольдбах, Жан Д'Аламбер, Леонард Ейлер, Данило Бернуллі. Перша праця Рене Декарта – «Compendium Musicae» («Трактат про музику»), перша велика робота Леонарда Ейлера – «Дисертація про звук». Лейбніц в листі Гольдбаху пише: «Музика є прихована арифметична вправа душі, яка не вміє рахувати». І Гольдбах йому відповідає: «Музика – це прояв прихованої математики».

**Мета статті:** описати спільні закономірності в музиці та математиці для подання музики як частини математики.

Найбільш поширеними музичними інструментами стародавньої Греції були кіфара та ліра. Для їх настроювання грецький математик і філософ Піфагор (VI ст. до н.е.) запропонував своє правило, відоме у Європі як

*піфагорів лад*. Щоб одержати бажаний звукоряд, він використовував акустичну чисту квінту – інтервал між другим та третім обертонами натурального звукоряду. Будуючи послідовно вгору ланцюжок чистих квінт, Піфагор отримав систему, в якій звуки, зведені в одну октаву, давали звукоряд з дієзами (див. рис. 1):



Рис. 1.

При побудові ланцюжка чистих квінт униз звукоряд був з бемолями. Зведення всіх звуків в одну октаву утворювало хроматичний звукоряд, в якому жоден з одержаних хроматичних звуків не збігався за висотою з сусідніми. Так, звук *мі-дієз* був вищим за *фа*, *сі-дієз* вищим за *до*, *ре-дієз* вищим за *мі-бемоль*, на  $\frac{1}{9}$  тона. Ця різниця отримала назву *піфагорової коми*. Причиною було те, що півтони у звукоряді не були рівновеликими. Наприклад, півтони між *до* і *до дієз*, *ре* і *ре дієз* були широкими і звуки *до-дієз* і *ре-дієз* тяжіли у висхідному напрямі. Півтони між *мі* та *мі-бемоль*, *ре* та *ре-бемоль* також були широкими, і звуки *мі-бемоль* та *ре-бемоль*, тяжіли у зворотному, низхідному напрямі. Оскільки музика й музичні інструменти у стародавній Греції були одноголосними, то правило Піфагора дозволяло найбільш повно виявити тяжіння звуків, що відповідали тогочасним естетичним вимогам. Навіть тоді, коли у середньовічній Європі почали будувати органи та інші клавирні інструменти з фіксованою висотою, *піфагорів лад* використовувався досить широко. Це пояснюється тим, що клавіатура інструментів мала лише сім діатонічних ступенів та один хроматичний і не включала інші хроматичні звуки піфагорового звукоряду (див. рис. 2):

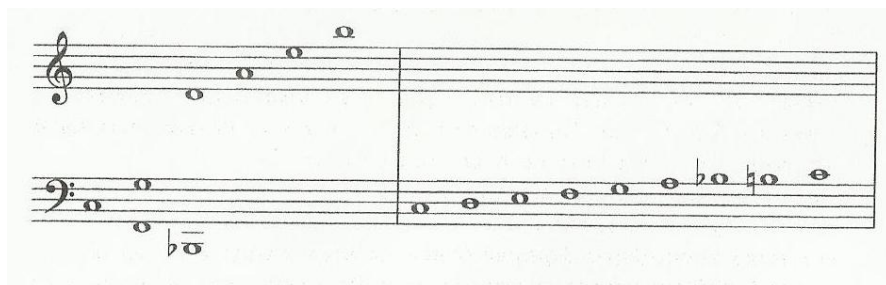


Рис. 2.

Розглянемо детально математичний опис побудови музичної гами. Основою музичної шкали (гами піфагорійців) був інтервал – октава. Вона є консонансом, що повторює верхній звук. Для побудови музичної гами піфагорійцям було потрібно розділити октаву на частини, які будуть гарно звучати. Так як вони вірили в досконалі пропорції, то зв'язали пристрій гами з середніми величинами: арифметичним, гармонійним.

Середнє арифметичне частот коливань тоніки ( $w_1$ ) і її октавного повторення ( $w_2$ ) допомагає знайти досконалий консонанс – квінту. Тобто,  $w_2 = 2w_1$ , то  $w_3 = (w_1 + w_2) : 2 = 3w_1 : 2$  або  $w_3 : w_1 = 3 : 2$  ( $w_3$  – частота коливань квінти).

Довжина струни  $l_3$ , відповідна квінті, за другим законом Піфагора – Архіта буде середнім гармонійним довжин струн тоніки  $l_1$  та її октавного повторення  $l_2$ .

Тобто,  $l_2 = l_1 : 2$ , то  $l_3 = 2l_1$ ;  $l_2 : (l_1 + l_2) = 2 : l_1$ ;

$l_1 : 2 : (l_1 + l_1 : 2) = l_1 : ((2l_1 + l_1) : 2) = 2l_1 : 3l_1 = 2 : 3$ ; або  $l_3 : l_1 = 2 : 3$ .

Взявши далі середнє гармонійне частот основного тону  $w_1$  і октави  $w_2$ , одержимо  $w_4 = 2w_1 w_2 : (w_1 + w_2) = 2 w_1 2 w_1 : (w_1 + 2 w_1) = 4 w_1 : 3 w_1 = 4 w_1 : 3$ .

Остаточнo маємо:  $w_4 : w_1 = 4 : 3$ . Отже, знаходимо ще один досконалий консонанс – кварту.

Визначимо, як пов'язані довжини струн знайдених частот ( $l_4$  і  $l_1$ ):

$l_4 = (l_1 + l_2) : 2 = (l_1 + l_1 : 2) : 2 = (2l_1 + l_1) : 2 : 2 = 3l_1 : 4$ ;  $l_4 : l_1 = 3 : 4$ .

Це означає, що довжини струн  $l_1$ ,  $l_2$  і  $l_4$  утворюють арифметичну прогресію. Тому, частота коливань квінти є середнім арифметичним частот

коливань основного тону  $w_1$  і октави  $w_2$ , а частота коливань кварта є середнім гармонійним  $w_1$  і  $w_2$ . Або інакше: довжина струни квінти є середнє гармонійне довжин струн основного тону  $l_1$  і октави  $l_2$ , а довжина струни кварта є середнє арифметичне  $l_1$  і  $l_2$ .

Це лише незначна частина тих прекрасних пропорцій, які були втілені в піфагорійській музичній гаммі, але завдяки їх математичному поясненні ми можемо зрозуміти музичні поняття та їх побудову.

Одним з важливих музичних елементів є ритм. Навколишній світ повний ритмів. У музичному ритмі можливе зміщення ударних складів, так як мають більше значення музичні наголоси – акценти. Ритми можна виявити й серед чисел (див. рис. 3).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

*Рис. 3.*

Перші 100 натуральних чисел розташовані у вигляді витонченої правильної фігури – так званого квадрата Піфагора. Займемося пошуками ритмів, прихованих у таблиці. У чисел, що стоять в одному рядку збігаються десятки, у чисел, що стоять в одному стовпці, збігаються одиниці.

Отже, в статті було приведено декілька основних аналогій поєднання музичних понять з математичними законами, хоча насправді їх існує досить багато, застосування яких є корисним у вивченні математики та дослідженні

окремих математичних законів. Це допомагає не тільки зрозуміти сутність математичних закономірностей, а й основу побудови музики та її ладу.

З власного досвіду можу зазначити, що займаючись музикою, людина розвиває й тренує свої математичні здібності. Музикою можна лікувати. Але все-таки головне її призначення – доторкнутись до глибоких струн людської душі й звучати в гармонії з навколишнім світом.

### *Література*

1. Вахромеев В. «Элементарная теория музыки» . – «Государственное музыкальное издательство», 1961 г.
2. Глиэр Р. О профессии композитора и воспитании молодежи. – «Советская музыка», 1954. – №8.
3. Деплан И. Я. Мир чисел. – Л.: Детская литература, 1966. – 71 с.
4. Дэвид Филипс. Нумерология и открытие внутреннего "Я". Полное практическое руководство. СПб: София, 2007. – 256 с.
5. Жмудь Л. Я. Пифагор и его школа – М.: Наука, 1990. – 192 с.
6. Ковалев В.П. «Математика в музыке». Выступление на семинаре в Московском физико-техническом институте в секции математических основ жизнеустройства.
7. Макеева О.Н. Научно-исследовательская работа по теме: «Математическое представление музыки».
8. Холопов Ю. Н. Консонанс и диссонанс // Музыкальный энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1990.
9. Хорошо темперированный клавир: Ноты произведений на International Music Score Library Project
10. Шарапкина Е. П. Гармония математики и музыки / П.Е.Шарапкина // Университетские чтения, 2006.
11. Энциклопедия для детей. Т. 7. Искусство. Ч. 1. – Э68-е изд., испр./ Глав. Ред. М.Д. Аксенова. – М.6 Аванта +, 2001. – 688 с.: ил.